

MESURA DE L'OMBRA DEL SOL AMB EL GNÓMON

Barcelona .- Festa de la Ciència 7 i 8 de juny 2008

Parc de la Ciutadella

Pere Closas. Aster, Agrupació Astronòmica de Barcelona.
pereclosas@iservicesmail.com

Introducció

La ciutat de Barcelona va celebrar la festa de la Ciència al Parc de la Ciutadella el cap de setmana del 7 i 8 de juny de 2008.

Diferents entitats relacionades més o menys directament amb la Ciència van oferir al llarg dels dos dies tot un seguit d'activitats.

Aster, Agrupació Astronòmica de Barcelona, va acceptar la invitació a participar a la festa, com és habitual.

El programa oferia observació pràcticament ininterrompuda dels astres: durant el dia es podia observar el Sol amb diferents modalitats i instruments (projecció sobre pantalla, observació directa a través de diferents filtres, observació i captura de la imatge del Sol amb càmera Webcam i projecció simultània en una pantalla). Aquesta observació es va poder realitzar el dissabte, des de les 11h fins a la posta de sol i el diumenge, de 11h fins a les 15 hores.

També s'havia previst una observació nocturna el dissabte, aproximadament fins a mitja nit. Entre els objectes previstos per observar hi havia la Lluna (sempre espectacular amb qualsevol ajuda òptica) i Saturn (la visió directa del seu anell és una experiència sorprenent per a la majoria dels observadors ocasionals). Lamentablement la meteorologia no va acompanyar i aquesta darrera activitat va haver de ser suspesa.

El marc era adient per a presentar l'experiència de la mesura de l'evolució de l'ombra del gnòmon, per parlar-ne amb els vianants interessats, i per anunciar-la com a projecte seleccionat per a l'Any Internacional de l'Astronomia 2009. Ni el dia ni l'entorn eren el més adequats per a l'obtenció curosa de dades.

A les pàgines següents es presenta la sèrie de dades obtinguda el dia 7, més completa que la del diumenge dia 8 per cobrir un espai temporal més ampli.

Convé destacar que aquest escrit té per objectiu fer veure que amb instruments summament simples i treballant amb certa cura es poden aconseguir resultats quantitativament raonablement ajustats. Aquesta és la raó per la qual hi apareixen determinats càlculs i fórmules matemàtiques.

Realització de les mesures. Resultats obtinguts

Per a dur l'experiència vam disposar un recollidor, el mànec vertical del qual projectava sobre el terra la seva ombra en ser il·luminat pel Sol.

L'alçada del gnòmon era de 81 cm i el seu gruix de 3 cm.

La imatge representa l'estat del muntatge, més o menys cap meitat de l'experiència.



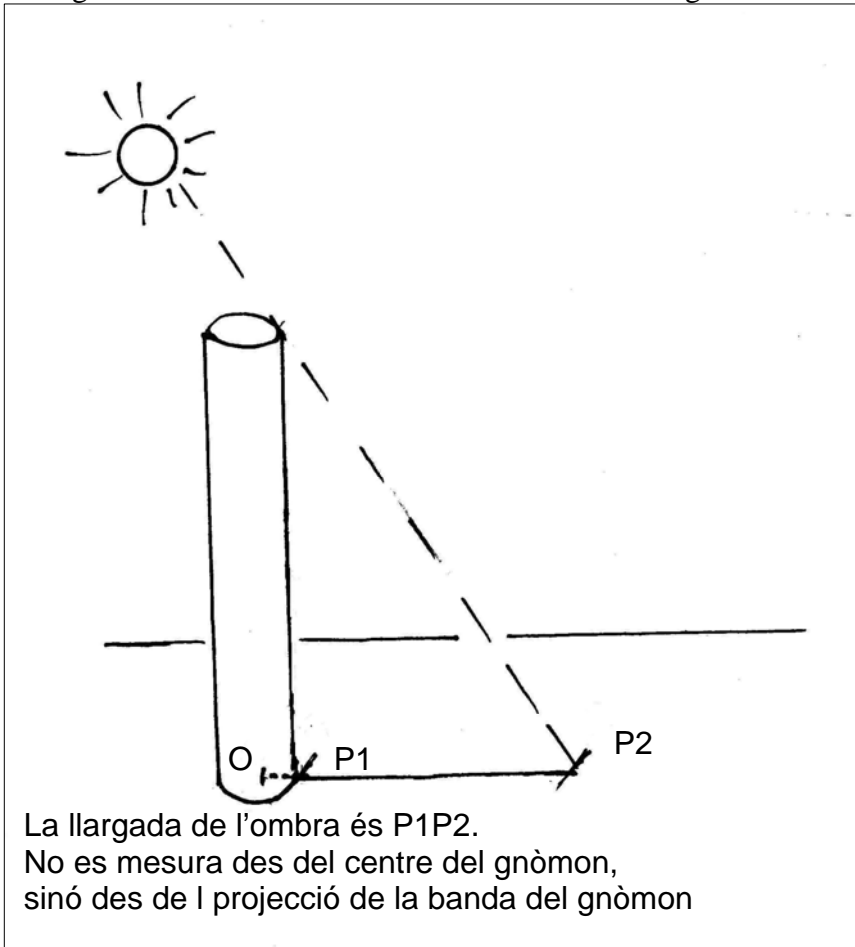
Abans de començar les mesures es va comprovar l'horitzontalitat del terra sobre el que es projectava l'ombra i la verticalitat del gnòmon.

Per conservar registre de les mesures efectuades, es va estendre sobre el terra un full de paper gruixut d'emballatge. Sobre aquest paper es va senyalar el centre del gnòmon i, al llarg de l'experiència, es van anar posant marques al punt on es projectava l'ombra del extrem superior del gnòmon en aquell moment; al costat de cada punt s'hi anotava l'hora, amb precisió del minut.

En acabar l'experiència es va procedir a prendre les mides de la llargada de l'ombra. Els resultats obtinguts són a la taula següent:

Hora oficial	Long. ombra (cm)	HoraUT	Ombra corregida (cm)
11:28	57	9:28	55,5
12:00	47	10:00	45,5
12:20	41,5	10:20	40
12:34	38,5	10:34	37
13:03	33	11:03	31,5
13:31	31,5	11:31	30
13:36	30,5	11:36	29
13:37	29,5	11:37	28
13:45	29,5	11:45	28
14:10	29	12:10	27,5
14:22	31,5	12:22	30
15:24	42,5	13:24	41

La primera columna conté l'hora de cada mesura, enregistrada al full.
La segona columna és la distància entre el centre del gnòmon i l'extrem de l'ombra.

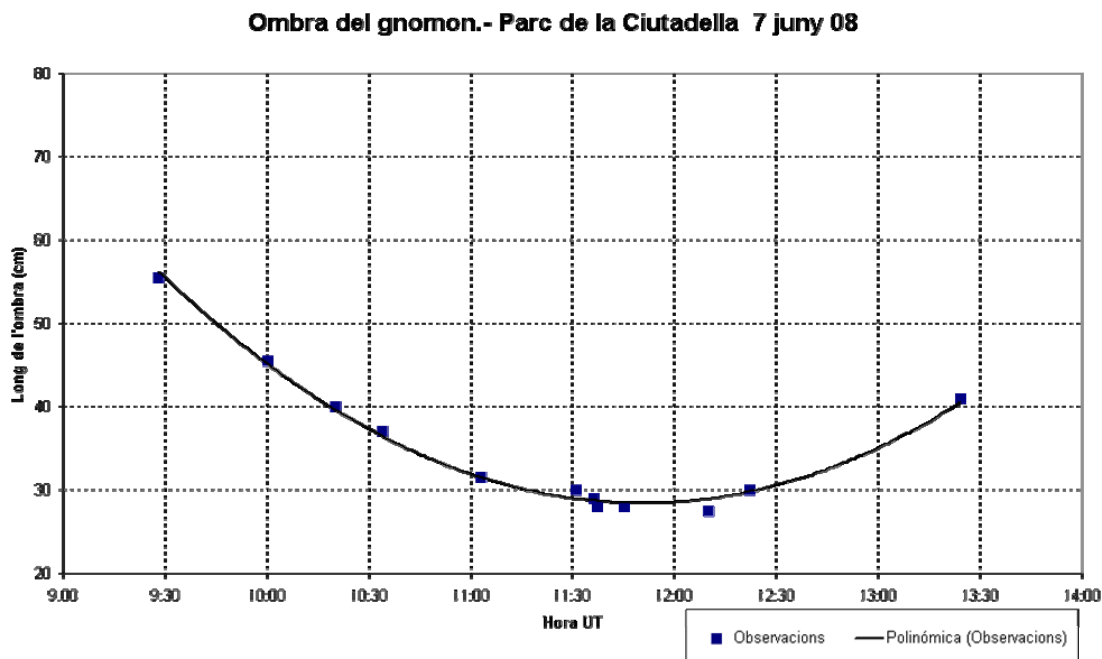


Les dues darreres columnes contenen correccions que cal fer a les dades.
La tercera columna expressa l'hora en Temps Universal (obtingut restant dues hores a l'hora oficial).
La quarta columna calcula l'ombra veritable, que s'ha de mesurar des de la projecció de la banda del gnòmon i no des del centre del gnòmon. Per tant el valor correcte s'obté restant 1,5 cm (radi del gnòmon) de les ombres mesurades fins al centre del gnòmon.

Determinació del moment de pas del Sol pel meridià

Les dades de la taula anterior (tercera i quarta columnes) s'han portat a la gràfica següent. Es pot veure que entre les 11h00 i les 12h30 hi ha algunes mesures una mica fora de la tendència general de la corba. Una mesura més acurada hauria de tenir millor resultats (vam tenir alguna ventada que ens va moure el paper; algun nen enjogassat ens el va trepitjar i moure lleugerament).

La corba és la línia de tendència dels punts, ajustada (primera aproximació), a una corba de segon grau.



La determinació de l'instant de pas del Sol pel meridià, instant en què l'ombra té la llargada mínima es pot fer de diferents maneres.

Simetria de la gràfica

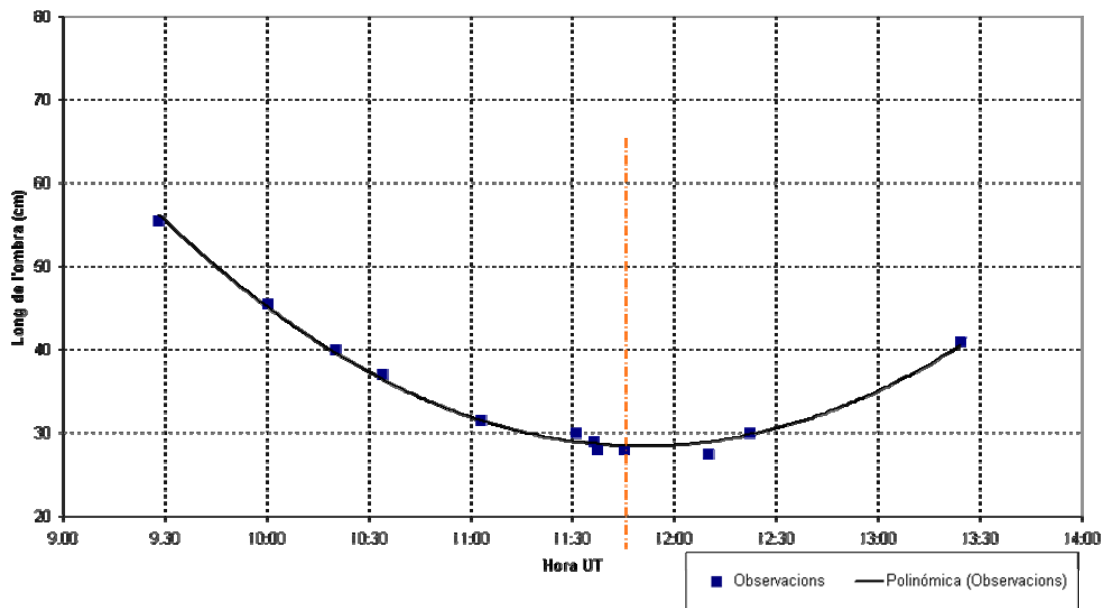
Una de les formes més senzilles és la impressió de la corba adjunta i tot seguit intentar doblegar la gràfica sobre una línia paral·lela al eix d'ordenades, buscant que les dues branques de la corba es sobreposin tan exactament com sigui possible.

A la pàgina següent hi ha la mateixa gràfica; s'hi ha representat una línia vertical que correspon a aquest eix de simetria.

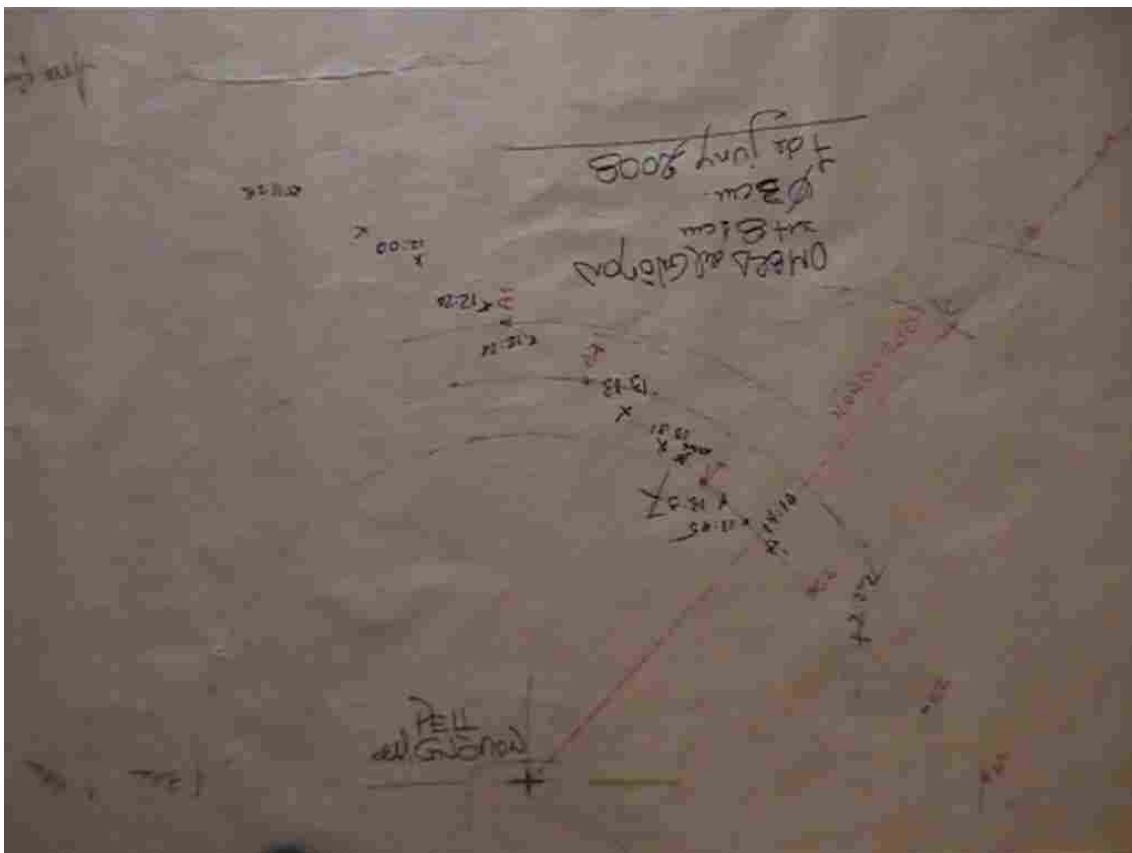
La mesura amb un regle mil·limetrat de les distàncies entre les divisions de la gràfica i de la posició d'aquest eix de simetria permet tenir un valor del instant de pas pel mínim.

Aquest càlcul dona el mínim a les 11h 46 m UT

Ombra del gnomon.- Parc de la Ciutadella 7 juny 08



Determinació de la direcció Nord-Sud i de l'instant de pas del Sol pel meridià



La figura adjunta és una imatge del paper amb el registre de les posicions de l'ombra. Les marques de l'extrem de l'ombra defineixen una línia de la part superior esquerra a la part inferior dreta (punts negres).

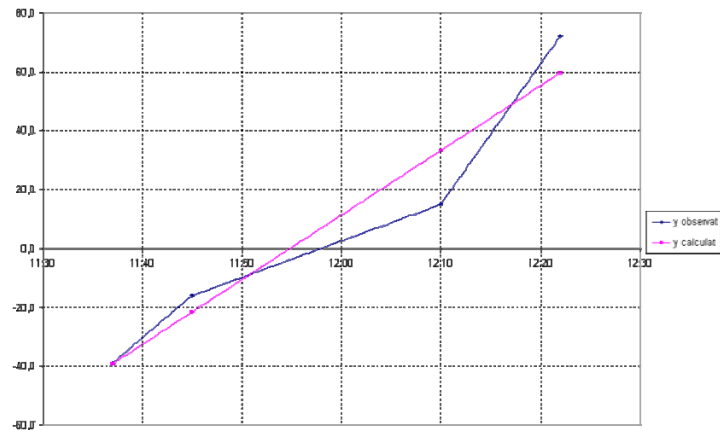
Amb centre en el peu del gnòmon es tracen circumferències concèntriques (en aquest cas de 30 cm, 35 cm i 40 cm de radi) de forma que cada un d'aquestes circumferències talla la línia trajectòria de l'extrem de l'ombra en dos punts. S'han representat, en color vermell, els punts A_1 i A_2 (punts de tall de la circumferència de 40 cm de radi), B_1 i B_2 (circumferència de 35 cm) i C_1 i C_2 (circumferència de 30 cm).

La mediatriu de qualsevol dels segments A_1A_2 , o B_1B_2 o C_1C_2 (aquestes mediatris haurien de coincidir) determina la direcció Nord Sud. S'ha marcat en color vermell aquesta direcció.

Fent interpolació lineal de les distàncies a aquesta línia de les mesures de l'extrem de l'ombra més properes s'obté el valor del moment de pas del Sol per el meridià, que és l' instant en què la trajectòria de l'extrem de l'ombra talla la direcció Nord-Sud.

Es va interpol·lar amb dos punts immediatament anterior al tall i dos punts posteriors al tall i es van obtenir la següent taula i gràfica:

Hora	Dist. (mm)
11:37	-39,0
11:45	-16,0
12:10	15,0
12:22	72,0



Les distàncies s'han considerat negatives abans del tall de la trajectòria de l'ombra a la línia Nord-Sud i positives després del tall.

Els punts de color blau corresponen a les observacions, que haurien de definir una línia sense les angulositats que s'hi observen.

S'ha pres com a millor valor la línia recta de regressió. Dóna el valor de 11h 54 m per l' instant de pas del Sol pel meridià, un valor lleugerament discrepant del que s'ha obtingut en la determinació anterior.

Aproximació analítica

La corba que relaciona la llargada de l'ombra amb l'hora conté funcions trigonomètriques; no és una paràbola. Però en un interval petit es pot representar, amb aproximació suficient, per una equació de segon grau, per una paràbola.

Aquest ajustament es pot veure a la taula adjunta:

Les dues primeres columnes són els valors experimentals obtinguts i ja presentats més amunt.

La tercera columna és el valor del temps, expressat en minuts des de les 11h UT, per evitar treballar amb números massa grans.

Finalment la quarta columna s'ha calculat amb l'expressió

$$\text{Ombra} = 31,43 - 0,148410 t + 0,0014937 t^2$$

Comparant les columnes segona i quarta es pot veure que la coincidència es força satisfactòria.

Hora UT	Ombra mesurada (cm)	Temps (minuts des de 11h)	Ombra calculada
11:03	31,5	3	31,01
11:31	30	31	28,27
11:36	29	36	28,03
11:37	28	37	27,99
11:45	28	45	27,78
12:10	27,5	70	28,37
12:22	30	82	29,31
13:24	41	144	41,04

Aquesta expressió permet calcular el valor de t corresponent al mínim de la funció, per derivació i igualació a zero.

El valor de t que correspon al mínim és 49,7 . Per tant el trànsit del Sol pel meridià correspondria a les 11h 49,7 m UT

I en aquest instant la funció dóna a l'ombra una llargada de 27,75 cm

Altura del Sol, en el moment del trànsit

$$\text{Tangent}(\text{Altura del Sol en el trànsit}) = \frac{\text{Alçada del gnómon}}{\text{Long. de l'ombra en el trànsit}}$$

I, donant valors numèrics a aquesta expressió, s'obté

$$\text{Tan}(\text{Altura del Sol}) = \frac{81 \text{ cm}}{27,75 \text{ cm}} = 2,9189$$

$$I \quad \text{Altura del Sol} = \tan^{-1}(2,9189) = 71,1^\circ$$

Comparació amb els valors de les efemèrides

Una de les finalitats de la presentació de les mesures amb el gnòmon és veure la precisió que es pot esperar amb l'instrumental que es proposa, particularment senzill.

En aquest apartat es comparen els resultats obtinguts amb els que es calculen a partir de les efemèrides astronòmiques de Sol. Aquestes efemèrides s'han obtingut de la pàgina web aa.usno.navy.mil/data/

Les coordenades del lloc d'observació es van estimar a partir del GoogleEarth
 Long 2° 11' E Lat 41° 23' N

Coordenades equatorials del Sol (posició del Sol i equació del temps):

Data i hora			AR			Dec			DistTerraSol	EqTemps		
Data		Hora	h	m	s	graus	'	"	UA	m	s	
2008	Jun	7	0:00	5	1	53,7	22	46	5,89	1,01494655	+ 1	9,7
2008	Jun	7	3:00	5	2	24,7	22	46	48,66	1,014961921	+ 1	8,3
2008	Jun	7	6:00	5	2	55,7	22	47	31,06	1,014977208	+ 1	6,9
2008	Jun	7	9:00	5	3	26,7	22	48	13,08	1,014992411	+ 1	5,5
2008	Jun	7	12:00	5	3	57,7	22	48	54,73	1,015007532	+ 1	4
2008	Jun	7	15:00	5	4	28,7	22	49	35,99	1,01502257	+ 1	2,6
2008	Jun	7	18:00	5	4	59,7	22	50	16,89	1,015037527	+ 1	1,2
2008	Jun	7	21:00	5	5	30,7	22	50	57,4	1,015052403	+ 0	59,7
2008	Jun	8	0:00	5	6	1,7	22	51	37,54	1,015067198	+ 0	58,3
2008	Jun	8	3:00	5	6	32,7	22	52	17,3	1,015081913	+ 0	56,8
2008	Jun	8	6:00	5	7	3,74	22	52	56,68	1,015096549	+ 0	55,4
2008	Jun	8	9:00	5	7	34,8	22	53	35,69	1,015111105	+ 0	53,9
2008	Jun	8	12:00	5	8	5,79	22	54	14,31	1,015125584	+ 0	52,5
2008	Jun	8	15:00	5	8	36,8	22	54	52,56	1,015139984	+ 0	51
2008	Jun	8	18:00	5	9	7,86	22	55	30,43	1,015154308	+ 0	49,5
2008	Jun	8	21:00	5	9	38,9	22	56	7,92	1,015168554	+ 0	48,1

L'equació del temps indica la diferència entre el valor mig del temps i el temps real mesurat pel sol. Aplicat aquest concepte al meridià de referència (Greenwich) indica el temps transcorregut entre les 12 hores assenyalades per rellotge i el pas del sol per l'esmentat meridià de referència.

Pel dia 7 de juny la correcció de 1 minuta i 4 segons significa que el pas del sol pel meridià de Greenwich va tenir lloc 1m i 4 s segons després del migdia del rellotge.

Al llarg de l'any aquest valor varia de forma que el sol pot arribar a avançar-se o endarrerir-se aproximadament 15 minuts.

Càlcul de l'instant de pas del Sol pel lloc d'observació el dia 7 de juny:

Migdia del rellotge a Greenwich:	12h	0m	0s
Equació del temps		- 1m	4s
Correcció per longitud		- 8m	48s
<u>Pas del Sol pel meridià del lloc d'observació</u>	<u>11h</u>	<u>50m</u>	<u>8s</u>

La altura del Sol en el moment del pas pel meridià es relaciona amb la latitud del lloc per l'expressió

$$\text{Distància al zènit} = \text{Latitud del lloc} - \text{Declinació del Sol}$$

i, per tant, $\text{Altura del Sol} = 90^\circ + \text{Declinació del Sol} - \text{Latitud del lloc}$

Donant valors numèrics:

$$\text{Altura del Sol} = 90 + (22^\circ 49') - (41^\circ 23') = 71^\circ 26' = 71,5^\circ \text{ aprox.}$$

La concordança entre els valors teòrics i els valors obtinguts de forma experimental és satisfactòria:

Altura del Sol: Calculada $71,5^\circ$ / Mesurada $71,1^\circ$

Hora del trànsit: Calculada 11h 50 / Mesurada, en un interval entre 11h 46 i 11h 55m

Es van obtenir també a la mateixa pàgina d'internet les coordenades azimuthals del Sol (funció de les coordenades geogràfiques del lloc d'observació), per contrastar les mesures de l'ombra.

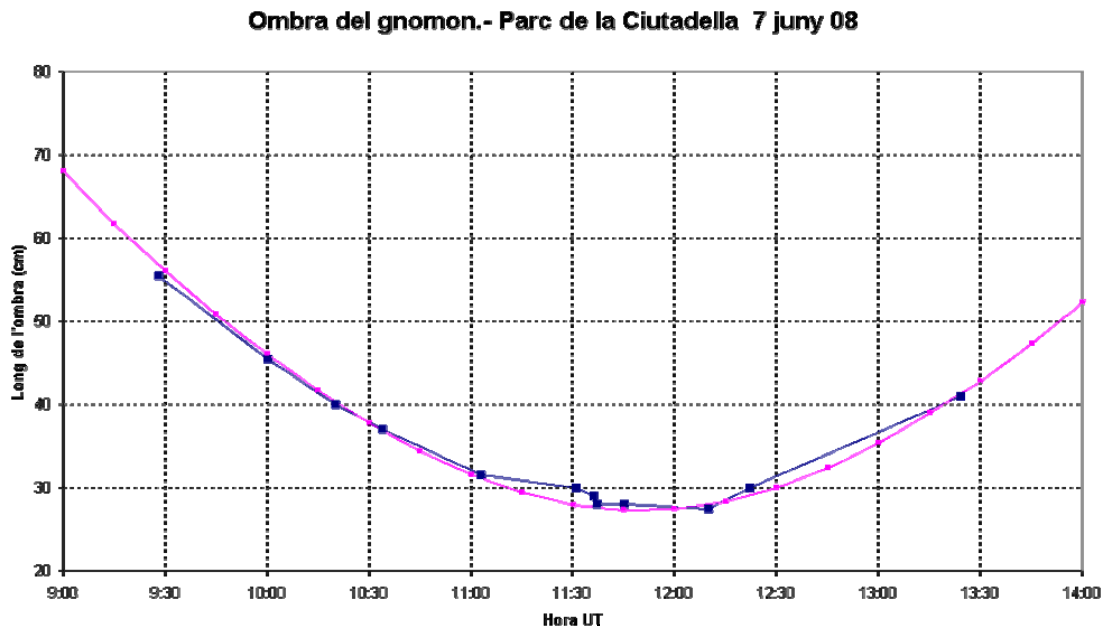
Les efemèrides són a les dues primeres columnes de la taula següent.

La tercera columna té l'hora oficial i la quarta el càlcul de la llargada de l'ombra, deduïda de l'expressió trigonomètrica

altura del gnòmon / llargada de l'ombra = tangent de l'altura del sol
prenent una altura del gnòmon de 81 cm

Hora UT	AlturaSol	Hora oficial	Ombra
9:00	40,4	11:00	102,2
9:30	45,2	11:30	86,4
10:00	49,5	12:00	74,3
10:30	53,2	12:30	65,1
11:00	55,9	13:00	58,9
11:30	57,6	13:30	55,2
12:00	57,9	14:00	54,6
12:30	56,8	14:30	56,9
13:00	54,6	15:00	61,8
13:30	51,3	15:30	69,7
14:00	47,3	16:00	80,3
14:30	42,7	16:30	94,3
15:00	37,7	17:00	112,6
15:30	32,5	17:30	136,6
16:00	27,0	18:00	170,7
16:30	21,5	18:30	220,9
17:00	15,9	19:00	305,4
17:30	10,3	19:30	478,7
18:00	4,8	20:00	1036,1

La gràfica següent permet comparar les observacions de l'ombra (punts de color blau) amb els valors teòrics de la taula anterior (punts de color rosat).



Conclusió

Amb motiu de l'any Internacional de l'astronomia, que tindrà lloc l'any 2009, es proposa la participació dels centres escolars que ho desitgin en un experiment col·lectiu consistent a mesurar el radi de la Terra, a partir de la determinació de l'altura del Sol en el moment del trànsit per meridià un dia determinat de l'any.

La coordinació de l'experiment i l'anunci de les dates es farà des de la pàgina www.astronomia2009.es

La presentació de l'experiència aprofitant l'avinentsa de la Festa de la Ciència tenia l'objectiu de col·laborar en la difusió de la iniciativa i recollir noves dades per fer veure que l'experiència és possible.

La invitació és oberta a tothom que hi vulgui participar.

Pere Closas

Sant Feliu de Llobregat, 28 de juny de 2008